מועד ב', סמסטר חורף תשפ"א - אלגברה 1/מ, 104016

10.3.21

חלק ב'

פתרונות מלאים

ת"ז :

פקולטה :

- משך המבחן : 75 דקות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- **בשאלה 7 יש לנמק** היטב את התשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב.**
  בשאלות 8-12 יש לסמן את התשובה הנכונה. **זה במודל**

ב ה צ ל ח ה !

<u>שאלה מס' 7</u> : (20 נקודות)

הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית :

א. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי ; אזי $V=\operatorname{Im}T+KerT$.

ב. אם $A\in\mathbb{R}^{4\times4}$ מקיימת : $rank(A)=2$ וגם $trace(A)=0$, אז A לכסינה.

<u>פתרון שאלה מס' 7:</u>

א. טענה לא נכונה. נסתכל על : $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ המוגדר ע"י : $T(x,y)=(0,x)$ שהוא אופרטור לינארי ידוע.
התמונה שלו היא : $ImT=sp\{(0,1)\}$ והגרעין הוא : $T(x,y)=(0,x)=(0,0)$ כלומר $x=0$ לכן
איבר כללי בגרעין הוא מהצורה $\{(0,y)|y\in\mathbb{R}\}=sp\{(0,1)\}$. קיבלנו כי $ImT=KerT$ ולכן
$ImT+KerT=ImT\neq\mathbb{R}^2$.

ב. טעינה לא נכונה : ניקח למשל : $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ שזו מטריצה מדרגה 2 שהעקבה שלה היא 0, והיא
לא לכסינה כי 0 הוא ערך עצמי מריבוי אלגברי 4 . נחשב ריבוי גיאומטרי של 0 :
$n-r(A-0I)=4-r(A)=4-2=2$. ריבוי אלגברי שונה מריבוי גיאומטרי ולכן המטריצה לא לכסינה.

<u>שאלה מס' 8</u> : (6 נקודות)

תהי $A=\{a_{ij}\}$ מטריצה ממשית מסדר 3×3. נתון כי

$$A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\ ,\ A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}\ ,\ A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$$

אזי $a_{2,3}$ שווה ל- :

א. -1 ; ב. -2 ; ג. -3; ד. 2 ; ה. 3.

<u>פתרון שאלה מס' 8:</u>

נכתוב את הנתון ככפל מטריצות :

$$A\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&-2\\2&-2&3\\0&1&2\end{pmatrix}$$

מחפשים רק את $a_{2,3}$ לכן ניתן לבנות משוואות של המכילות איבר זה (שורה 2 כפול כל עמודה יתן 3 משוואות עם 3 נעלמים שאחד מהם הוא האיבר המבוקש).

ניתן גם למצוא את A ע"י הכפלת בהופכי של המטריצה הכופלת את A מימין. נפתור כך :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&2&0&-1&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&-1\\0&1&0&2&1&-1\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&-2\\2&-2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&4&-2\\2&-2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ a_{2,3}=2\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)+3\cdot 1=3$$

סימון נכון : ה'.

שאלה מס' 9 : (6 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ותהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ההעתקה הנתונה ע"י $T(v)=A\cdot v$; אזי לכל ערכי $m,\ n$ בהכרח:

א. אם $m=n$ אז T חח"ע.

ב. אם T על אז $rank(A)=m$.

ג. אם T חח"ע אז $rank(A)=m$.

ד. אם $rank(A)=n$ אז T על.

ה. אם $n-m=2$ אז $\dim KerT=2$.

פתרון שאלה מס' 9:

נעבור על כל הסעיפים:

א. **לא נכון כי:** אם $m=n$ אז T הוא אופרטור. במקרה זה, T חח"ע אם"ם הוא על. אבל אף אחד מהם לא נתון לכן זה לא בהכרח נכון.

ב. **נכון כי:** אם T על אז מימד התמונה הוא כמימד הטווח כלומר $dimImT=dim\mathbb{R}^m=m$. מאחר ומימד התמונה שווה לדרגת המטריצה, הרי ש $rank(A)=m$.

ג. **לא נכון כי:** אם T חח"ע אז מימד הגרעין הוא 0 ולכן ממשפט המימדים השני נובע כי מימד התמונה הוא $dimImT=dim\mathbb{R}^n=n$.

ד. **לא נכון כי:** אם $rank(A)=n$ אז מימד התמונה הוא n. במקרה ו- $n<m$ הרי שלא נקבל ש T על.

למשל אם המטריצה A היא מסדר 2×3 ומדרגה 2. אז ההעתקה היא מ $\mathbb{R}^3$. ל $\mathbb{R}^2$. מימד התמונה 2 אבל מימד הטווח 3 לכן T לא על.

ה. **לא נכון כי:** ניקח מטריצה מסדר 2×4 אז $n-m=4-2=2$, ואם דרגת המטריצה היא 1 אז מימד הגרעין הוא $dimKerT=dim\mathbb{R}^n-dimImT=4-1=3\neq 2$.

סימון נכון: ב'

שאלה מס' 10 : (6 נקודות)

יהיו $W=span\{x^3+2x\ ,\ x^2-ax\}$, $U=span\{x^3-ax\ ,\ x^2+1\}$ שני תת מרחבים של $\mathbb{R}_3[x]$.

אם $\mathbb{R}_3[x]\neq U+W$, אזי:

א. $a=-1$; ב. $a=-2$; ג. $a=1$; ד. $a=2$; ה. $a=3$.

פתרון שאלה מס' 10:

כי לקבל $\mathbb{R}_3[x]\neq U+W$, מספיק לגרום לכך שמימד הסכום יהיה שונה מ- 4, המימד של $\mathbb{R}_3[x]$. מאחר ואיחוד הבסיסים יתן קבוצה פורשת לסכום, נדרג את הקואורדינטות של איחוד הבסיסים ונדרוש שדרגת המטריצה תהייה קטנה מ- 4:

$$U = span\left\{x^3 - ax\ ,\ x^2+1\right\}\ ,\ W = span\left\{x^3+2x\ ,\ x^2-ax\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2+a & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2+a & 0 \\ 0 & 0 & -a & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1-0.5a \end{pmatrix}$$

כשי שהשורה תתאפס והדרגה תהייה פחות מ- 4, נדרוש $-1-0.5a=0$ כלומר $a=-2$.

סימון נכון ב'.

<u>שאלה מס' 11</u> : (6 נקודות)

תהי $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & b+1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 2 & b & a & b \\ 2 & a & a & b \end{pmatrix}$; אזי $\det(C)$ שווה ל- :

א. $(b-a)^2$; ב. $-(b-a)^2$; ג. a^2+b^2 ; ד. a^2-ab ; ה. $ab-a^2$

<u>פתרון שאלה מס' 11:</u>

נחשב דטרמיננטה :

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 & b+1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 2 & b & a & b \\ 2 & a & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 & b+1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & b-2 & -a-2 & -b-2 \\ 0 & a-2 & -a-2 & -b-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ b-2 & -a-2 & -b-2 \\ a-2 & -a-2 & -b-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2b & -a+b & -b-2 \\ a+b & -a+b & -b-2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left[2b(-a+b)-(a+b)(-a+b)\right] = -(-2ba+2b^2+a^2-ab+ba-b^2) =$$

$$-(a^2-2ab+b^2) = -(a-b)^2 = -(b-a)^2$$

סימון נכון ב'.

<u>שאלה מס' 12</u> : (6 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. אזי :

א. אם הפולינום האופייני של A הוא $f(t)=t^2-2t+1$ אז הפולינום האופייני של A^2 הוא $g(t)=t^4-4t^2+1$.

ב. אם A^2 לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אז A לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

ג. אם λ הוא ערך עצמי של A מריבוי אלגברי 2 אז λ^2 הוא ערך עצמי של A^2 מריבוי אלגברי 2.

ד. אם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.

ה. אם $f(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2-\lambda+4$ הוא הפולינום האופייני של A אז A לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

<u>פתרון שאלה מס' 12:</u>

נעבור על כל הסעיפים :

א. **לא נכון כי:** אם הפולינום האופייני של המטריצה A הוא ממעלה 2 אז A היא מסדר 2 ולכן גם A^2 מסדר 2 וגם הפולינום האופייני שלה הוא ממעלה 2.

ב. **לא נכון כי:** אפשר לקחת לדוגמא את $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ מטריצה לא לכסינה כי 0 הוא ערך עצמי מריבוי אלגברי 2 וריבוי גיאומטרי 1 אבל $A^2=0$ מטריצה לכסינה כי היא אלכסונית.

ג. **לא נכון כי:** אם ניקח למשל את $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ אז 1 הוא ערך עצמי של A מריבוי אלגברי 1 אבל הוא ערך עצמי מריבוי אלגברי 2 של $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

ד. **לא נכון כי:** למשל מטריצה היחידה היא לכסינה (כי אלכסונית) והערכים העצמיים שלה לא שונים זה מזה.

ה. **נכון כי:** אם הפולינום האופייני של A הוא $f(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2-\lambda+4$ אז A מטריצה מסדר 3 והערכים העצמיים שלה הם :

$$f(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2-\lambda+4=\lambda^2(\lambda-4)-1(\lambda-4)=(\lambda^2-1)(\lambda-4)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4)$$

קיבלנו שלמטריצה A יש 3 ערכים עצמיים שונים והיא מסדר 3 ולכן לכסינה.

סימון נכון ה'.